C. R. Acad. Sci. Paris, t. xxx, Série I, p. 000–000, 2000
Problèmes mathématiques de la Mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Non-local interactions resulting from the homogenization of a linear diffusive medium

Mohamed CAMAR-EDDINE and Pierre SEPPECHER

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire Appliquée et Modélisation,
Université de Toulon et du Var, 83957 La Garde CEDEX, France.
e-mail : seppecher@univ-tln.fr
(Reçu le xx xxxxxx 2000)

Abstract. It is well known that the effective properties of a heterogeneous diffusive medium may contain a non-local part. We are interested in the set of all non-local interactions which can arise from homogenization. We consider a bounded domain Ω of $\mathbb{R}^3$ and we show that any non-local energy of the kind

$$\int_\Omega \alpha(x)\|\nabla u\|^2\,dx + \int_\Omega u(x)^2\,\nu(dx) + \int_{\Omega\times\Omega} (u(x)-u(y))^2\,\mu(dx,dy)$$

can be obtained, provided that the Radon measures ν and μ make this energy functional lower semi-continuous.

Interactions non-locales résultant de l'homogénéisation d'un problème de diffusion linéaire

Résumé. *Il est connu que des interactions non-locales peuvent apparaître dans les modèles issus de l'homogénéisation de problèmes linéaires de diffusion. Nous nous intéressons à l'ensemble des interactions non-locales que l'on peut ainsi obtenir. Nous considérons un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ et nous montrons que toute énergie non-locale du type*

$$\int_\Omega \alpha(x)\|\nabla u\|^2\,dx + \int_\Omega u(x)^2\,\nu(dx) + \int_{\Omega\times\Omega} (u(x)-u(y))^2\,\mu(dx,dy)$$

appartient à cet ensemble, sous réserve que les mesures de Radon ν et μ rendent cette énergie semi-continue inférieurement.

Version Abrégée en Français

On sait que les propriétés effectives d'un matériau composite peuvent être très différentes des propriétés des matériaux qui le constituent. Il est intéressant de savoir quels types de matériaux peuvent être ainsi obtenus par homogénéisation. Dans le cas de problème de conduction linéaire, quand les coefficients de conduction sont bornés dans L^∞ ainsi que leur inverse, la réponse est

Note présentée par xxx.

connue [11],[13] : le problème homogénéisé est encore un problème de conduction. On sait par contre que, lorsque les coefficients de conduction ne sont pas bornés, le problème homogénéisé peut être non local. Des exemples ont été donnés dans [1],[2] et [4]. Dans cette note nous nous intéressons au problème inverse : à la recherche d'un matériau composite dont les propriétés effectives contiennent une interaction non locale donnée. Notre étude est faite dans le cadre de la théorie de la Γ-convergence introdute par E. De Giorgi [7] et dont une étude détaillée peut être trouvée dans [6]. Le but est de décrire la fermeture vis à vis de la Γ-convergence dans L^2 des énergies de diffusion non dégénérées.

Nous nous plaçons dans le cas linéaire : l'énergie est une fonctionnelle quadratique, positive et Markovienne [9],[10]. La théorie des formes de Dirichlet montre alors que l'énergie homogénéisée est une forme de Dirichlet. Lorsque cette forme est régulière, la formule de Deny-Beurling [3] permet de représenter cette énergie comme la somme de trois termes : diffusif, étrange et non-local (cf. équation (1)). Nous prouvons dans cette note qu'une large classe d'interactions non-locales peut être obtenue : toute mesure symétrique $\mu(dx,dy)$ telle que $\mu(\Omega\times A)$ s'annule pour tout ensemble A de capacité nulle.

On considère le cube unité Ω et l'on note $\mathcal{B}$ sa base. Pour toutes mesures de Radon positives μ et ν (définie respectivement sur $\Omega\times\Omega$ et Ω) et pour toute fonction α de L^∞_+ (c'est à dire de $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, vérifiant $\alpha\geq 0$ et $1/\alpha\in\mathrm{L}^\infty(\Omega)$), nous définissons, pour toute fonction régulière u, l'énergie $F_{\alpha,\mu,\nu}(u)$ par (1) si u s'annule sur $\mathcal{B}$, par $F_{\alpha,\mu,\nu}(u)=+\infty$ sinon. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{M}$ des couples (μ,ν) pour lesquels la fonctionnelle $F_{\alpha,\mu,\nu}(u)$ est fermable, i.e. semi-continue inférieurement sur $C^\infty(\bar{\Omega})$ pour la topologie forte de $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathrm{I\!R})$. On peut caractériser ces mesures par : $\nu(A)=0$ et $\mu(A\times\Omega)=0$ pour tout ensemble A de capacité nulle. Dans ce cas, la fonctionnelle peut être étendue pour tout $u\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathrm{I\!R})$ par (2). Notre résultat principal s'écrit alors

Théorème 1. *Pour tout (μ,ν) dans $\mathcal{M}$ et α dans L^∞_+, il existe une suite (α_n) de L^∞_+ telle que $F_{\alpha_n,0,0}$ Γ-converge vers $F_{\alpha,\mu,\nu}$ pour la topologie forte de $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathrm{I\!R})$.*

Remarquons que nous ne décrivons pas entièrement la fermeture vis à vis de la Γ-convergence [6] dans L^2 des énergies de diffusion non dégénérées. En effet, supposer F régulière (sous la forme (1)) ainsi que $\alpha\in\mathrm{L}^\infty_+$ et $(\mu,\nu)\in\mathcal{M}$ sont des hypothèses restrictives.

On établit d'abord (théorème 2) le résultat pour $\nu=0$ et pour une mesure μ élémentaire, c'est à dire appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par (3). La preuve est obtenue par la construction explicite d'un matériau composite ayant les bonnes propriétés effectives :

On découpe d'abord le domaine Ω en n^3 cubes Ω^n_I définis par (5). Les fibres sont des cylindres C^n_I (définis par (7)) qui relient chaque cube Ω^n_I au cube $\Omega^n_I+\mathrm{w}$. Quelques précautions doivent être prises pour fixer les extrémités x^n_I de ces fibres de manière à éviter toute collision. Leur rayon r^n_I est donné par (6), l'ordre de grandeur des rayons des fibres, fixé par la suite (r_n) qui vérifie (4), est extrêmement petit. De cette façon, les fibres se déconnectent de la matrice à la limite. C'est l'origine de l'apparition de la non-localité. La connexion n'est renforcée qu'au voisinage des extrémités par l'ajout des boules hautement conductrices $\mathcal{B}^n_I:=B\left(x^n_I,n^{-2}\right)$. La partie fortement conductrice (représentée par la figure 1) est alors l'union Ω^n des cylindres $\mathcal{C}^n_I$ et des boules $\mathcal{B}^n_I$. Le matériau composite est alors défini par la donnée (8) du coefficient de conductivité dans les différentes parties. La preuve de la Γ-convergence de l'énergie de ce milieu vers l'énergie attendue est ensuite un problème d'homogénéisation classique.

On étend ensuite ce résultat à une somme finie $\sum_{i=1}^p\mu^i$ de p mesures élémentaires (théorème 3). La preuve est obtenue par récurrence sur p en utilisant un argument de diagonalisation.

On étend ensuite ce résultat au cas d'une mesure μ générale (théorème 4) en approximant μ par une somme finie de mesures élémentaires convenablement choisies (14).

Enfin le théorème 1 est obtenu par l'introduction du terme étrange ν. Il suffit de remarquer qu'un tel terme n'est rien d'autre qu'une interaction non locale entre le domaine Ω et sa base $\mathcal{B}$ sur laquelle est vérifiée une condition de Dirichlet. En effet les termes en μ et ν peuvent être remplacé par un unique terme non local $\tilde{\mu}$ donné par (16).

Une version plus détaillée de ces preuves ansi qu'une extension au cas vectoriel (élasticité linéaire) paraîtra dans [5]. Notons que le cas de l'élasticité est beaucoup plus riche : il a été prouvé [12] que les propriétés effectives pouvaient contenir des termes de second gradient.

---

1. Introduction

It is well known that the effective properties of a composite diffusive medium can differ fundamentally from the properties of the components. A suitable frame to compute these effective properties is the Γ-convergence theory to which this study belongs. This notion was introduced by E. De Giorgi [7] in the general context of relaxation and functional convergence in the calculus of variations, refer to [6] for more details. The question of the type of materials which can be obtained through homogenization has been addressed for a long time. For diffusive media, when the conductivity coefficients of the heterogeneous material are uniformly lower and upper bounded, the answer is known [11],[13] : the effective material is still a diffusive one. At the opposite, when the conductivity coefficients of the heterogeneous material are not uniformly bounded, non local terms can appear. Examples of such phenomenon have been given in [1],[2] and [4]. Here we are interested in the class of all non local interactions which can be obtained in that way, more precisely in the closure for the Γ-convergence in L^2 of non degenerated diffusive energies. In other words, we consider the following inverse problem : for any given non-local interaction, is there a composite diffusive medium the effective properties of which contain this interaction? As the energy of a linear diffusive medium is a positive, quadratic and Marcovian functional, the theory of Dirichlet forms states that the effective energy is a Dirichlet form [9],[10]. When this form is regular, a formula due to Deny-Beurling [3] gives a representation for it as the sum of i) a diffusive term, ii) a "killing" term and iii) a "jumping" or "non-local" term (see equation (1)). Here we prove that a wide class of such functionals can be reached : any symmetric measure $\mu(dx, dy)$, satisfying $\mu(\Omega \times A) = 0$ for any set A of vanishing capacity, is the jumping measure for the Γ-limit of some sequence of diffusion energies.

Let us notice that we only describe a part of the Γ-closure in L^2 of non degenerated diffusive energies. Indeed this Γ-closure contains functionals F for which $\alpha \notin \mathrm{L}^\infty_+$ or $(\mu, \nu) \notin \mathcal{M}$ or even non regular functionals (not of type (1)).

The main result is stated in Theorem 1. To prove it, we use a step by step approach, reaching at each step a more general jumping measure (Theorems 2, 3, 4). The longest step is the first one : we explicitly describe a composite medium the effective energy of which contains a elementary non-local interaction, that is an interaction with fixed direction and fixed range (see figure 1). Then we progressively extend this result to a general non-local interaction. The killing term is easily obtained : it can be seen as a particular case of non-local interaction between the domain Ω and its lower face $\mathcal{B}$ (where a Dirichlet condition is verified).

A more detailed version of the proofs will be available in [5] together with an extension to the (much richer) vectorial case (linear elasticity). It has been proved [12] that the effective properties of a linear elastic composite material can depart from the Dirichlet forms framework.

2. Main result

We consider diffusion problems on a bounded domain Ω of $\mathbb{R}^3$, submitted to a Dirichlet condition on a part $\mathcal{B}$ of its boundary (for sake of simplicity we assume that Ω is the cube $(0,1)^3$ and $\mathcal{B}$ is its lower face $(0,1)^2 \times \{0\}$).

Let us denote $\mathrm{L}^\infty_+ := \{\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega), 1/\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega), \varphi \geq 0\}$ the set of all non-degenerated diffusion coefficients. For any $\alpha \in \mathrm{L}^\infty_+$, for any Radon measures μ on $\bar\Omega \times \bar\Omega$ and ν on $\bar\Omega$, we consider the quadratic energy defined, for any $u \in C^\infty(\bar\Omega)$, by

$$F_{\alpha,\mu,\nu}(u) := \int_\Omega \alpha(x)\|\nabla u\|^2\,dx + \int_\Omega u(x)^2\,\nu(dx) + \int_{\Omega\times\Omega} (u(x)-u(y))^2\,\mu(dx,dy)\ , \tag{1}$$

if u vanishes on $\mathcal{B}$, $F_{\alpha,\mu,\nu}(u) := +\infty$ otherwise. Note that only the symmetric part μ^s (out of the diagonal) of μ plays a role in (1). We assume that (μ,ν) is such that $F_{\alpha,\mu,\nu}$ is closable, i.e. lower semi-continuous on $C^\infty(\bar\Omega)$ for the strong topology of $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R})$. We denote $\mathcal{M}$ the set of such couples of measures. It can be verified that (μ,ν) belongs to $\mathcal{M}$ if and only if $\nu(A)=0$ and $\mu^s(A\times\Omega)=0$ for any polar set A (i.e. for any set with vanishing capacity [9]). As a consequence, we can extend this functional over $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R})$ by setting, for any $u \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R})$:

$$F_{\alpha,\mu,\nu}(u) := \inf\left\{\liminf F_{\alpha,\mu,\nu}(u_n),\ u_n \in C^\infty(\bar\Omega), u_n \to u \text{ in } \mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R})\right\} \tag{2}$$

Our main result states that any functional of type (1-2) can be obtained as the Γ-limit of a sequence of classical diffusion energies. We show :

Theorem 1. *For any (μ,ν) in $\mathcal{M}$ and α in L^∞_+, there exists a sequence (α_n) in L^∞_+ such that $F_{\alpha_n,0,0}$ Γ-converges to $F_{\alpha,\mu,\nu}$ for the strong topology of $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R})$.*

3. A preliminary homogenization result

We begin by stating the result for a vanishing measure ν and for a particular class $\mathcal{E}$ of elementary measures μ which have fixed direction and range. More precisely,

$$\mathcal{E} := \{\delta_{x+\mathrm{w}}(dy)f(x)dx,\ \mathrm{w}\in\Omega,\ f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega),\ f \geq 0\}\ . \tag{3}$$

It is easy to verify that, for any $\mu \in \mathcal{E}$, $(\mu,0)$ belongs to $\mathcal{M}$ (this would not be the case for simpler interactions like $\delta_{y_0}(dy)\delta_{x_0}(dx)$ or even like $\delta_{x_0}(dy)f(x)dx$).

We explicitly construct a heterogeneous diffusive material the effective properties of which correspond to energy $F_{\alpha,\mu,0}$. This composite material contains very thin and very high conductivity fibers. Let us now describe the geometry of these fibers.

We assume that the components of w are such that $2^p\mathrm{w} \in \mathbb{N}^3$, for some integer p. In the sequel, n denotes a sequence of integers tending to infinity (we assume without loss of generality that $n = 2^{q_n}$ for some integer $q_n > p$) and (r_n) is a sequence of reals tending to zero in such a way that

$$\lim_{n\to\infty} n^{-3}|\ln r_n| = +\infty. \tag{4}$$

We divide the domain Ω in n^3 elementary cubes

$$\Omega_I^n := \left(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right)\times\left(\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right)\times\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right). \tag{5}$$

where $I=(i,j,k)$ belongs to $\{1\ldots n\}^3$ which we identify with $\{1\ldots n^3\}$. We denote $\mathcal{I}^n$ the set of indices $I \in \{1,\cdots n^3\}$ such that $\Omega_I^n + \mathrm{w} \subset \Omega$ (note that, for such indices, due to our assumptions on w and n, $\Omega_I^n + \mathrm{w}$ is again an elementary cube).

Denoting $|\mathcal{D}|$ the Lebesgue measure of any Borel set $\mathcal{D}$ and $⨍_{\mathcal{D}} u := |\mathcal{D}|^{-1}\int_{\mathcal{D}} u\,dx$ the mean value of any function $u \in \mathrm{L}^1(\mathcal{D})$, we define the radii of our high conductivity fibers by setting :

$$r_I^n := r_n \left(\frac{\|\mathrm{w}\|^3}{\pi} ⨍_{\Omega_I^n} f(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Let us denote $R := \max\left(2, (\|\mathrm{w}\|^3\pi^{-1}\|f\|_\infty)^{1/2}\right)$ and c_I^n the center of the cube Ω_I^n. In order to define the end points of our high conductivity fibers, we consider a family of points x_I^n which verify the following assumptions i) $\|x_I^n - c_I^n\| < (4n)^{-1}$, ii) if $\Omega_I^n + m\mathrm{w} = \Omega_{I'}^n$ for some $m \in \mathbb{Z}$, then $x_I^n + m\mathrm{w} = x_{I'}^n$, iii) otherwise, $d(\Delta_I^n, x_{I'}^n) > 2Rn^{-2}$, where Δ_I^n denotes the straight line passing through the point x_I^n, and parallel to w. These assumptions avoid any collision between the fibers; the proof of the existence of such a family is straightforward.

Thus, the high conductivity fibers are the cylinders C_I^n, of radius r_I^n, of axis Δ_I^n and length $\|\mathrm{w}\|$:

$$\mathcal{C}_I^n := \{\ x \in \Omega \mid p_I^n(x) \in [x_I^n,\ x_I^n + \mathrm{w}]\,,\ \|x - p_I^n(x)\| \le r_I^n\} \tag{7}$$

Here $p_I^n(x)$ denotes the orthogonal projection of x on the straight line Δ_I^n. As the radii of the cylinders are very small, they are weakly connected with the matrix. In order to improve this connection (at the extremities only), we add high conductivity balls $\mathcal{B}_I^n := B\left(x_I^n, n^{-2}\right)$. Then the high conductivity part of the material is $\Omega^n := (\bigcup_{I\in\mathcal{I}^n} \mathcal{C}_I^n) \cup (\bigcup_I \mathcal{B}_I^n)$ (see figure 1).

Figure 1. Simulating non local interactions by high conductivity fibers

The conductivity coefficient in Ω^n is assumed to be constant, equal to $r_n^{-2}n^{-3}$. Hence the conductivity coefficient of the composite material in consideration reads as

$$\alpha_n(x) := \begin{cases} \alpha(x) & \text{if } x \in \Omega \setminus \Omega^n, \\ \dfrac{1}{r_n^2 n^3} & \text{if } x \in \Omega^n. \end{cases} \tag{8}$$

Theorem 2. *For any elementary interaction $\mu \in \mathcal{E}$ and for any α in L_+^∞, let (α_n) be the sequence defined by (8). Then the sequence $F_{\alpha_n,0,0}$ Γ-converges to $F_{\alpha,\mu,0}$ for the strong topology of* $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Sketch of the proof : Let (u^n) be a sequence with bounded energy ($F_{\alpha_n,0,0}(u^n) < M$) converging to u in $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Let us define $\mathcal{D}_I^n := \{x \in C_I^n, \|p_I^n(x) - x_I^n\| \le n^{-3}/2\}$ and $\widetilde{\mathcal{D}}_I^n := \{x \in$

$C^n_{\tilde I}, \|p^n_I(x) - (x^n_I - \mathrm{w})\| \le n^{-3}/2\}$ where $\tilde I$ denotes the index of point $x^n_I - \mathrm{w}$ ($x^n_{I'} = x^n_I - \mathrm{w}$). Thus $\mathcal{D}^n_{\tilde I}$ and $\widetilde{\mathcal{D}}^n_I$ are two extremity parts of the cylinder C^n_I. A standard estimation of the energy of a conductive fiber leads to

$$\int_{C^n_I} \|\nabla u^n\|^2\,dx \ge \frac{\pi (r^n_I)^2}{\|\mathrm{w}\|} \left(⨍_{\mathcal{D}^n_{\tilde I}} u^n - ⨍_{\widetilde{\mathcal{D}}^n_I} u^n \right)^2 . \tag{9}$$

On the other hand, successive applications of Poincaré's inequality lead to the following convergences in $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$:

$$\sum_{I=1}^{n^3} \left(⨍_{\mathcal{D}^n_{\tilde I}} u^n \right) 1_{\Omega^n_I} \to u \quad \text{and} \quad \sum_{I=1}^{n^3} \left(⨍_{\widetilde{\mathcal{D}}^n_I} u^n \right) 1_{\Omega^n_I} \to u . \tag{10}$$

Here the role of the high conductivity balls $\mathcal{B}^n_I$ is crucial. Then we get the following estimate for the energy in Ω^n :

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega^n} \alpha_n(x) \|\nabla u^n\|^2\,dx \ge \int_{\Omega\times\Omega} ((u(x) - u(y))^2\,\mu(dx, dy) . \tag{11}$$

As the measure of Ω^n tends to zero, we also get the inequality :

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus\Omega^n} \alpha_n(x) \|\nabla u^n\|^2\,dx \ge \int_{\Omega} \alpha(x) \|\nabla u\|^2\,dx . \tag{12}$$

Inequalities (11) and (12) imply the lowerbound inequality :

$$\liminf_{n\to\infty} F_{\alpha_n,0,0}(u^n) \ge F_{\alpha,\mu,0}(u) . \tag{13}$$

The upperbound inequality is obtained in a standard way by considering an explicit approximating sequence. Here the assumption (4) on the order of magnitude of r_n (i.e. of the radii of the fibers) is crucial. □

4. Proof of Theorem 1.

Theorem 2 can easily be extended to a finite sum of elementary interactions. We have :

Theorem 3. *Let $p \in \mathbb{N}$ and $\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^p \in \mathcal{E}$ be p elementary measures. Let $\alpha \in \mathrm{L}^\infty_+$ and set $\mu := \sum_{i=1}^p \mu^i$. Then, there exists a sequence (α_n) in L^∞_+ such that $F_{\alpha_n,0,0}$ Γ-converges to $F_{\alpha,\mu,0}$ for the strong topology of $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$.*

Proof : Consider the sequence α^p_n, given by Theorem 2, such that $(F_{\alpha^p_n,0,0})$ Γ-converges to $F_{\alpha,\mu^p,0}$ and set $\tilde\mu := \sum_{i=1}^{p-1} \mu^i$. As the functional $F_{0,\tilde\mu,0}$ is continuous for the strong topology of $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$, a classical property of Γ-convergence (see [6]) states that $(F_{\alpha^p_n,\tilde\mu,0})$ Γ-converges to $F_{\alpha,\mu,0}$. The result follows using induction and diagonalization arguments. □

Now let us extend this result to any non-local interaction. We have

Theorem 4. *Let $(\mu, 0) \in \mathcal{M}$ and $\alpha \in \mathrm{L}^\infty_+$. Then, there exists a sequence (α_n) in L^∞_+ such that $F_{\alpha_n,0,0}$ Γ-converges to $F_{\alpha,\mu,0}$ for the strong topology of $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$.*

Proof: We consider the sequence $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by

$$\mu^n := \sum_{I=1}^{n^3}\sum_{I'=1}^{n^3} a^n_{II'}\mathbf{1}_{\Omega^n_I}(x)\,\delta_{x+\mathrm{w}^n_{II'}}(dy)\ dx\ , \tag{14}$$

where $a^n_{II'} := n^3\mu(\Omega^n_I \times \Omega^n_{I'})$ and $\mathrm{w}^n_{II'} := c^n_I - c^n_{I'}$. As the sequence $F_{\alpha,\mu^n,0}$ Γ-converges to $F_{\alpha,\mu,0}$, the result follows using a diagonalization argument.

□

Proof of theorem 1: Let us notice that, if $(\mu,\nu) \in \mathcal{M}$, then $(\tilde{\mu}, 0)$ given by

$$\tilde{\mu}(dx, dy) := \mu(dx, dy) + \nu(dx)\mathcal{H}^2_{|\mathcal{B}}(dy) \tag{16}$$

belongs also to $\mathcal{M}$. Here $\mathcal{H}^2_{|\mathcal{B}}$ denotes the 2-D Hausdorff measure on $\mathcal{B}$. Then Theorem 1 is a straightforward consequence of Theorem 4 since the functional $F_{\alpha,\mu,\nu}$ coincides with $F_{\alpha,\tilde{\mu},0}$. □

Bibliography

[1] BELLIEUD M., BOUCHITTÉ G., Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Non local effects. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 26 (1998), 407-436.

[2] BELLIEUD M., BOUCHITTÉ G., Homogénéisation en présence de fibres de grandes conductivité, CRAS, t.323, Série I, p.1135-1140 (1996).

[3] BEURLING A., DENY J., Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45 (1959), 208-215.

[4] BRIANE M., Homogenization in some weakly connected domains, Ricerche Mat, 47, no. 1 (1998), 51–94.

[5] CAMAR-EDDINE M., SEPPECHER P., Non-local interactions resulting from the homogenization of a linear elastic medium, in preparation.

[6] DAL MASO G., An introduction to Γ-convergence. Progress in linear diff. eq. and their app., Birkhäuser, Boston, 1993.

[7] DE GIORGI E., Su un tipo di convergenza variazionale, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 58 (1975), pp. 842-850.

[8] EVANS L.C.,GARIEPY R.F., Measure Theory and Fine properties of Functions. Studies in Advanced Mathematics 1992.

[9] MOSCO U., Composite media and asymptotic Dirichlet forms, Journal of Functional Analysis, 123, 368-421 (1994).

[10] MOSCO U., Composite media and Dirichlet forms, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser 1991.

[11] MURAT F., TARTAR L., H-Convergence, Topics in the mathematical modelling of composite materials, Progress in Nonlinear Diff. Eq. and their Applicatioins, R.V. Kohn Ed., Birkhäuser, Boston, 1994.

[12] PIDERI C., SEPPECHER., A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium, Continuum Mech.andThermodyn.,9,P.241-257,(1997).

[13] TARTAR L., Estimations Fines des Coefficients Homogénéisés. Ennio De Giorgi Colloquium, Edited by P.Krée, Res. Notes in Math. 125 Pitman, London, (1985) 168-187.